

**Instrucciones:**

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

**SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN**

**GRUPO A**

1. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. Calcule:  $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$

b. Halle las asíntotas de la función:  $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$

**Solución**

a.  $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$

Se calculará la integral indefinida por partes:

Llamamos  $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x \end{cases}$

Luego aplicando la fórmula de integración por partes:  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du$  obtenemos:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

Entonces aplicando teorema fundamental del cálculo:  $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$

Atendiendo a los límites de integración tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - [0 \sin(0) + \cos(0)] =$$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} = 0.57$$

b. Estudie las asíntotas de la función:  $f(x) = \frac{x^3+5x^2}{x^2-1}$

### Asíntotas Verticales

Se determina para qué valores se anula el denominador.

$$x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x): \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asíntota Vertical en  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x): \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

Asíntota Vertical en  $x = -1$ .

### Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

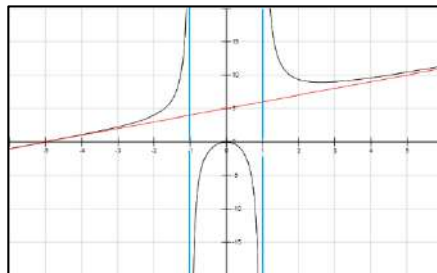
No existen asíntotas horizontales.

### Asíntotas Oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}}{x} = \frac{x^3 + 5x^2}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 - x^3 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x}{x^2 - 1} = 5$$

Existe una asíntota oblicua dada por la recta  $y = x + 5$ .



2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Se plantea la siguiente ecuación matricial:  $X \cdot A - C^t = X \cdot B$

- Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X.
- Hallar la matriz X que cumple la ecuación.

### Solución

a.

La operación de diferencia de matrices entre el producto de XA y la matriz C ha de ser posible, por tanto tomando en consideración lo siguiente:

- La dimensión de la matriz C es 3x2 (3 filas y 2 columnas), pero su traspuesta será 2x3. El producto XA ha de tener esta misma dimensión 2x3 (2 filas y 3 columnas). De aquí se infiere que el número de filas de X ha de ser 2.
- La dimensión de la matriz A es 3x3 (3 filas y 3 columnas). Para poder multiplicar X por A el número de columnas de X ha de ser igual al número de filas de A. De aquí se concluye que el número de columnas de X ha de ser 3.

Por tanto para que las operaciones tengan sentido la dimensión de la matriz X ha de ser 2x3.

b.

Despejar la matriz  $X = C^t(A - B)^{-1}$

$$\text{Hallar } D = A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos  $\det(A - B) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists(A - B)^{-1}$

$$\left. \begin{array}{l} D_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad D_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ D_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad D_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad D_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad D_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad D_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Adj}(D)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{su inversa } (D)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuar la multiplicación

$$X = C^t(D)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Otra forma

$$\text{Hallar } D = A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot D = C^t$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-X_1 = -1 \rightarrow X_1 = 1$$

$$-X_2 = -3 \rightarrow X_2 = 3$$

$$X_1 + X_3 = 6 \rightarrow X_3 = 6 - 1 = 5$$

$$-X_4 = 0 \rightarrow X_4 = 0$$

$$-X_5 = -1 \rightarrow X_5 = 1$$

$$X_6 = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dada la recta  $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ , y dado el plano  $\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$

- ¿Cuál es la posición relativa de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ ?
- Calcular el plano  $\pi'$  que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$

### Solución

a.

Se determinará que la recta  $r$  no pertenece al plano  $\pi$  y es paralela a dicho plano.

$$r // \pi \rightarrow \vec{v}_r // \vec{n}_\pi$$

Se halla el vector director de la recta  $r$

$$r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \text{ o bien } \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$$

$$\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$$

Se halla el vector normal al plano  $\pi \vec{n}_\pi = (1, -3, 5)$

Se determina si los vectores son perpendiculares

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-2, 1, 1) \cdot (1, -3, 5) = -2 - 3 + 5 = 0$$

Se comprueba que la recta  $r$  no pertenece al plano  $\pi$  sustituyendo un punto cualquiera de  $r$  en la ecuación del plano. Por ejemplo para  $\lambda = -2$  el punto de la recta  $r$  es  $A = (4, 0, 0)$ , y sustituyendo en  $\pi \equiv 4 - 3(0) + 5(0) \neq 2$ , luego  $r$  no pertenece al plano.

En conclusión, la recta  $r$  es paralela al plano  $\pi$

b) Calcular el plano que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$

Utiliza  $\vec{v}_r$  como vector del plano  $\pi'$

$n$  es vector normal del plano

Calculamos un punto cualquiera de la recta, por ejemplo el punto  $(4, 0, 0)$

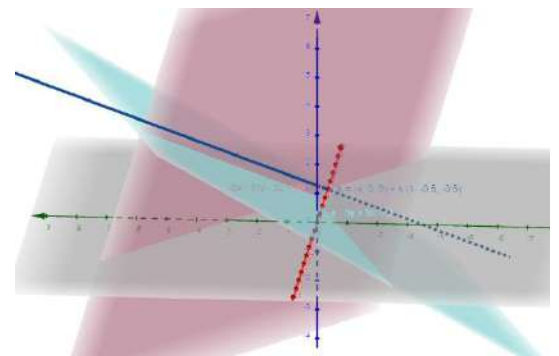
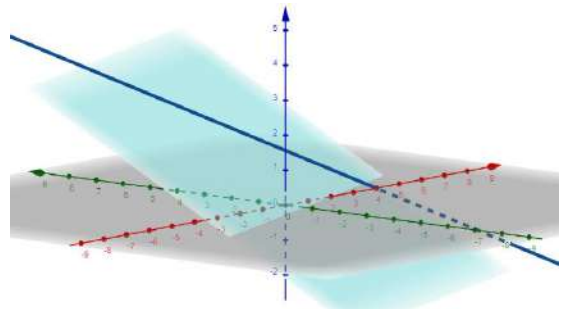
La ecuación del plano  $\pi'$  viene dada por

$$\begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3(x-4) - 10y + z - 6z - 5(x-4) - y = 0$$

$$-3x + 12 - 10y + z - 6z - 5x + 20 - y = 0$$

$$-8x - 11y - 5z + 32 = 0$$



4. Si una bombilla fluorescente tiene un 90% de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:
- Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30% tienen una vida útil de al menos 800 horas.
  - La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7
  - El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10

### Solución

a.

Se define la variable binomial  $X$ : “número de bombillas que tienen una vida útil de al menos 800 horas de 20 bombillas”

Eventos independientes

Éxito: que una bombilla tenga una vida útil de al menos 800 horas,

$$p = 0.9, q = 0.1$$

$$X \sim B(n, p) = B(20, 0.9)$$

$$P(X = 18) = \binom{20}{18} (0.9)^{18} (0.1)^2 = \frac{20!}{18!(20-18)!} (0.9)^{18} (0.1)^2 = 0.2851$$

Existe un 28.5% de probabilidades de que exactamente 18 bombillas de 20 tengan una vida útil de al menos 800 horas. Por lo que la afirmación **no es cierta**.

b.

Definimos la variable binomial  $Y$  = “número de bombillas que no tengan una duración de al menos 800 horas de 20”

Eventos independientes

Éxito: que una bombilla no tenga una duración de al menos 800 horas  $p = 0.1, q = 0.9$

$$Y \sim B(n, p) = B(20, 0.1)$$

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = \\ &= \binom{20}{0} (0.1)^0 (0.9)^{20} + \binom{20}{1} (0.1)(0.9)^{19} + \binom{20}{2} (0.1)^2 (0.9)^{18} = \\ &= \frac{20!}{0!(20)!} (0.1)^0 (0.9)^{20} + \frac{20!}{1!(19)!} (0.1)(0.9)^{19} + \frac{20!}{1!(18)!} (0.1)^2 (0.9)^{18} = 0.6769 \end{aligned}$$

Existe un 67.7% de probabilidades de que 2 o menos bombillas de 20 no tengan una duración de al menos 800 horas. Por lo que la afirmación **es cierta**.

c.  $np = 90$

La afirmación **no es cierta**.

## GRUPO B

1. Halle los valores de  $a$  y  $b$  para que la recta de ecuación  $y = 6x + a$  sea tangente a la curva  $f(x) = \frac{bx-1}{bx+1}$  en el punto de abscisa  $x = 0$   
Escriba las funciones que se obtienen.

### **Solución**

La pendiente de la recta  $y = 6x + a$  es  $m = 6$

Otra forma sería que como la recta  $y = 6x + a$  es tangente a la curva  $f(x)$  en  $x = 0 \rightarrow f'(0) = 6$

Se halla la derivada de  $f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{b(bx+1) - (bx-1)b}{(bx+1)^2} = \frac{b^2x + b - b^2x + b}{(bx+1)^2} = \\ &= \frac{b(bx+1 - bx+1)}{(bx+1)^2} = \frac{2b}{(bx+1)^2} \end{aligned}$$

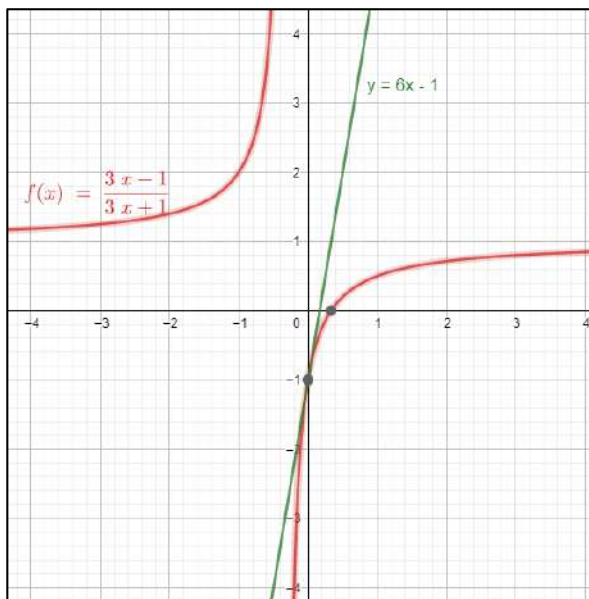
Se evalúa  $f'(0) = 2b$  y sabiendo que  $f'(0) = 6 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$

La recta y la función coinciden en el punto de tangencia de abscisa  $x = 0$

$$\begin{cases} y = 6(0) + a \\ f(0) = -1 \end{cases} \rightarrow a = -1$$

Las funciones que se obtienen son:

- $f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}$
- $y = 6x - 1$



2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} kx + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ky + 4z &= 2 \\ 2x + ky + 6z &= k - 2 \end{aligned} \right\}$$

- Discuta el sistema según los valores del parámetro  $k$
- Resuelva el sistema para  $k = 0$

### **Solución**

a.

$$\text{Matriz de coeficientes } A = \begin{pmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada } A|b = \begin{pmatrix} k & 2 & 6 & 0 \\ 2 & k & 4 & 2 \\ 2 & k & 6 & k-2 \end{pmatrix}$$

Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes  $A$

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{vmatrix} = 6k^2 + 12k + 16 - (12k + 4k^2 + 24) = 2k^2 - 8 \rightarrow k = \pm 2$$

### Discusión del Sistema de ecuaciones según el parámetro $k$

- **Si  $k \neq \pm 2$**

$$\text{Rang}A = \text{Rang}A/b$$

Sistema compatible determinado con solución única

- **Si  $k = 2$**

Entonces el determinante  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$  y como  $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ , entonces  $\text{Rang} A = 2$

La matriz ampliada  $A/b = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$  y como  $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$   $\text{Rango } A/b = 2$

Por lo que  $\text{Rang}A = \text{Rang}A/b = 2 < \text{número de incógnitas} = 3$

Sistema compatible indeterminado.



- Si  $k = -2$

Entonces el determinante  $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$  y como  $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ , entonces

Rang  $A = 2$

La matriz ampliada  $A/b = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$  y como:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 24 - (24 + 48) = -128 \neq 0,$$

entonces Rang  $A/b = 3$

Rang  $A \neq$  Rang  $A/b$

Sistema Incompatible

b.

Tenemos el sistema,

$$\left. \begin{array}{l} 2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 2 \\ 2x + 6z = -2 \end{array} \right\}$$

Cuya matriz de coeficientes es Matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

siendo su determinante  $|A| = -8$

Resolviendo por la regla de Cramer (o cualquier otro método)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-16 - 24}{-8} = \frac{-40}{-8} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{6(-8)}{-8} = \frac{-48}{-8} = 6$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{8 + 8}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$$

Solución del sistema: **(5,6,-2)**

3. Consideremos el punto  $A(1, 2, 1)$ , y la recta  $r: \begin{cases} x + y = 5 \\ 3y + z = 14 \end{cases}$
- Encuentre la ecuación del plano  $\pi$  que contiene al punto  $A$  y es perpendicular a la recta  $r$ .
  - Consideremos  $P(1, 4, 2)$ , un punto de la recta  $r$ . Y sea  $s$  la recta determinada por los puntos  $A$  y  $P$ . Calcule el ángulo que forman las rectas  $r$  y  $s$ .

### Solución

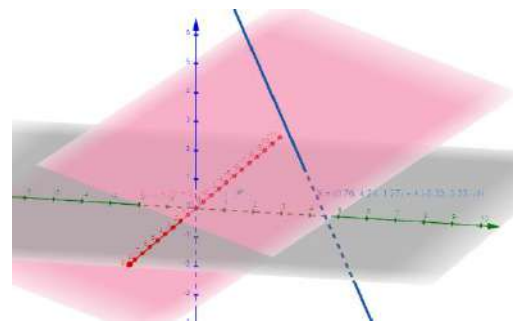
a.

Hallamos el vector director de la recta  $r$ :

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 3)$$

Entonces las ecuaciones paramétrica y continua de la recta  $r$  (no se piden y no se evalúan)

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \text{ o bien, } x - 1 = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 2}{3}$$



Como  $r$  es perpendicular a  $\pi$ , entonces  $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1, -1, 3)$

Entonces la ecuación del plano  $\pi$  será:  $x - y + 3z + d = 0$

Como  $A(1, 2, 1) \in \pi \Rightarrow 1 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2$

Luego  $\pi \equiv x - y + 3z - 2 = 0$

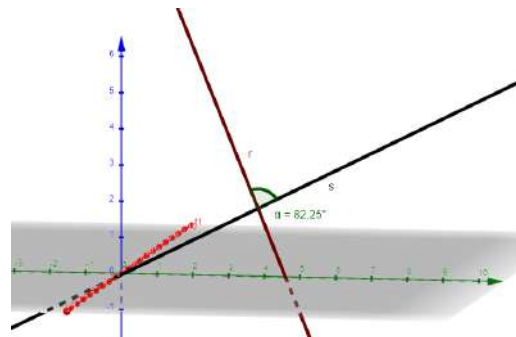
b.

Dado que las rectas contienen el punto  $A$  en común, son rectas secantes. No son coincidentes ni paralelas porque los vectores no son proporcionales.

$$\overrightarrow{AP}(0, 2, 1); \vec{u}_r(1, -1, 3)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-2+3}{\sqrt{5}\sqrt{11}} = 0.1348;$$

$$\alpha = \arccos(0.1348) = 82.25^\circ$$

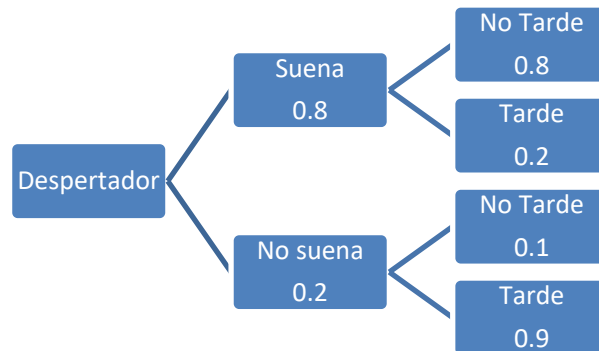


4. Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20% de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9
- Represente el diagrama de árbol del problema.
  - Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20%.
  - Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5
  - Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

### Solución

a.  
Definimos los eventos:

S: El despertador suena  
NS: El despertador no suena  
T: Llega tarde a clases  
NT: No llega tarde a clases



b.

Aplicamos la regla del producto para calcular la probabilidad de ocurrencia simultánea:

$$P(T \cap S) = P(S) \cdot P(T/S) = (0.8) \cdot (0.2) = 0.16$$

Existe un 16% de probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador. **Por lo que la afirmación no es cierta.**

c.

Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(NT) = P(S)P(NT/S) + P(NS)P(NT/NS) = (0.8)(0.8) + (0.2)(0.1) = (0.64) + (0.02) = 0.66$$

Existe un 66% de probabilidad de que no llegue tarde a clases. **Por lo que la afirmación no es cierta.**

d. Si un día llegó tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

$$P(S/T) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{0.16}{1 - 0.66} = \frac{0.16}{0.34} = 0.4705$$

La probabilidad de que, habiendo llegado tarde a clase, el despertador haya sonado es de 0.4705.