



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2016–2017

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: Julio

- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la función f definida de la forma

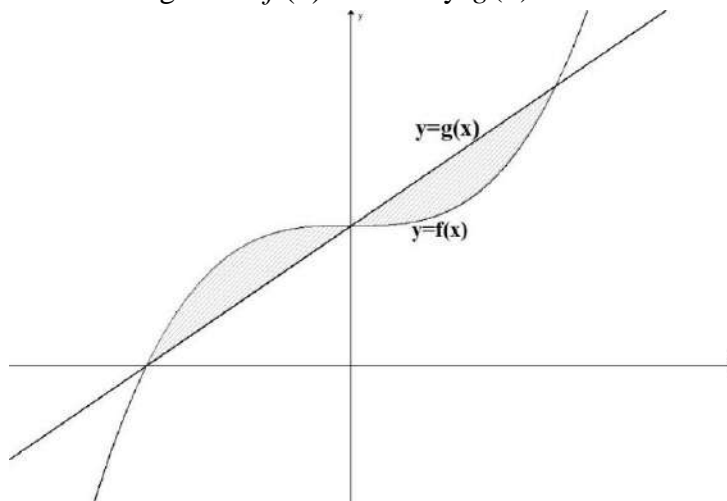
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sea derivable en todo $x \in \mathbb{R}$

(2,5 pts)

2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$

(2,5 pts)



3. Sea M la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$$\left. \begin{aligned} 2X + 3Y &= M \\ 3X - 2Y &= M^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

4. Dado el plano $\pi: 2x + y - z = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,1)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π . (1,25 puntos)



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2016–2017

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(2)

Convocatoria: Julio

Instrucciones:

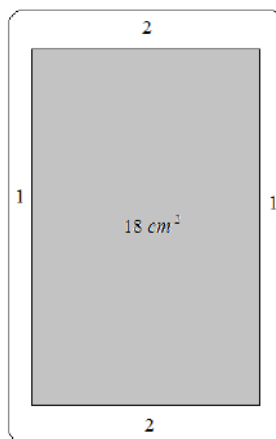
- Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B

1. Calcular los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} \quad (1,25 \text{ puntos}) \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} \quad (1,25 \text{ puntos})$$

2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2 . Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

4. Dados la recta $r: x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{m}}{-3}$ y el plano $\pi: 2x + y + z = 9$ se pide

a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)

b) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la función f definida de la forma

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sea derivable en todo $x \in \mathbb{R}$

(2,5 pts)

Para ser derivable primero debe ser continua y para ello debe serlo en $x = 2$ y debe cumplirse:

- Existe $f(2) = 4 + 8 + a = 12 + a$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 4x + a = 4 + 8 + a = 12 + a$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -x^2 + bx = -4 + 2b$
- Los tres valores deben ser iguales. $12 + a = -4 + 2b \Rightarrow a = -16 + 2b$

Para ser derivable, debe serlo en $x = 2$ y para ello deben coincidir las derivadas laterales en $x = 2$.

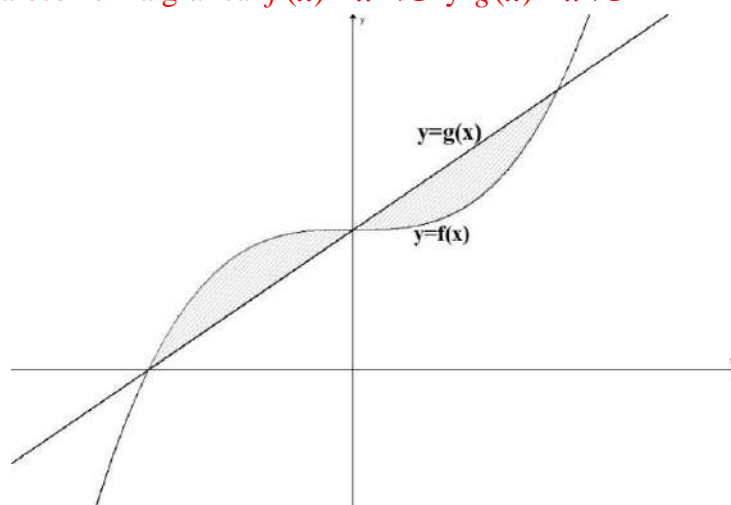
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 2 \\ -2x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Debe cumplirse } \left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + 4 = 8 \\ f'(2^+) = -4 + b \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = -4 + b \Rightarrow \boxed{b = 12}$$

Sustituyendo $a = -16 + 2 \cdot 12 = 24 - 16 = 8$

Los valores pedidos son $a = 8$ y $b = 12$.

2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$ (2,5 pts)



Veamos donde se cortan las funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 1 = x + 1 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

El área de la región pedida se divide en dos integrales definidas ya que se cruzan las funciones en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Calculemos el valor de las integrales definidas.

$$\int_{-1}^0 x^3 + 1 - (x + 1) dx = \int_{-1}^0 x^3 + 1 - x - 1 dx = \int_{-1}^0 x^3 - x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x + 1 - (x^3 + 1) dx = \int_0^1 x + 1 - x^3 - 1 dx = \int_0^1 x - x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El área pedida es $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

3. Sea M la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2Y = M^{-1} \end{array} \right\} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2Y = M^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ 6X - 4Y = 2M^{-1} \\ -6X - 9Y = -3M \\ \hline -13Y = 2M^{-1} - 3M \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ -13Y = 2M^{-1} - 3M \end{array} \right\}$$

Para poder proseguir necesitamos calcular la inversa de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^t)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguimos con el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ -13Y = 2M^{-1} - 3M \end{array} \right\} \Rightarrow -13Y = 2 \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 2-3 \\ 2-3 & -21 \end{pmatrix}$$

$$-13Y = \begin{pmatrix} -14 & -1 \\ -1 & -21 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$$

$$2X + 3Y = M \Rightarrow 2X + \frac{3}{13} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - \frac{3}{13} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$$

$$2X = \begin{pmatrix} -\frac{42}{13} & 1 - \frac{3}{13} \\ 1 - \frac{3}{13} & 7 - \frac{63}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} -\frac{42}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{28}{13} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{21}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{14}{13} \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -21 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$; $Y = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$

4. Dado el plano $\pi : 2x + y - z = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,1)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π . (1,25 puntos)

a)

De la recta $r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ podemos obtener dos puntos de la misma.

$$r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} z = 3 + y - x \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

$$\text{Si tomamos } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 + y \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 + 1 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ El punto es } A(0,1,4)$$

$$\text{Si tomamos } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} z = 2 + y \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 - 1 = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ El punto es } B(1,-1,1)$$

De aquí obtenemos el vector director de la recta $\vec{v} = \overline{AB} = (1, -1, 1) - (0, 1, 4) = (1, -2, -3)$

$$\text{La ecuación es } \left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1, -2, -3) \\ \text{Pasa por } A(0,1,4) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{-3}}$$

b) El plano pedido es paralelo a r , luego tiene como vector director el de la recta r

$\vec{v} = (1, -2, -3)$ y al ser perpendicular al plano $\pi : 2x + y - z = 0$ también tiene como vector director el normal del plano $\vec{u} = \vec{n} = (2, 1, -1)$. Y pasa por el punto $P(1,2,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1, -2, -3) \\ \vec{u} = (2, 1, -1) \\ \text{Pasa por } P(1,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - 6y + 12 + z - 1 + 4z - 4 + y - 2 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 5y + 5z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x - y + z = 0}$$

OPCIÓN B

1. Calcular los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} \quad (1,25 \text{ puntos}) \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} \quad (1,25 \text{ puntos})$$

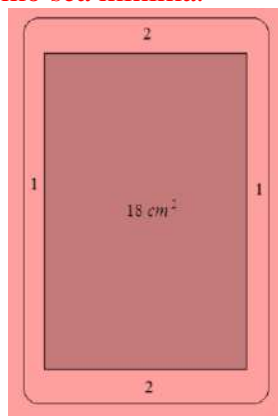
a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} &= \frac{1+1-2}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \operatorname{sen} x}{\cos(x^2) \cdot 2x} = \frac{1-1+0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2 \cos x}{-\operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x \cdot 2x + \cos(x^2) \cdot 2} = \frac{1+1+2}{0+2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \end{aligned}$$

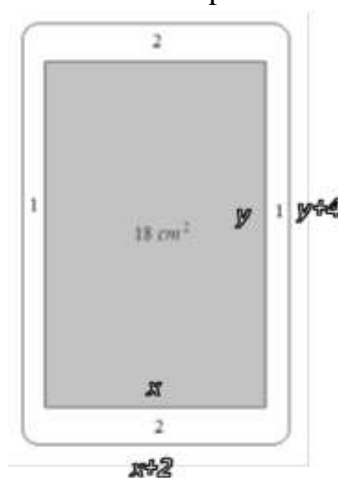
b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} &= \frac{\sqrt{4} - 2}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{1}{4}}{2x} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} = \\ &\left\{ \text{La derivada de } \frac{1}{2\sqrt{4+x}} = \frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ es } \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} (4+x)^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{-1}{4} (4+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}}}{2} = \frac{\frac{-1}{4\sqrt{(4)^3}}}{2} = \boxed{\frac{-1}{64}} \end{aligned}$$

2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2 . Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



Añadamos las medidas de base y altura del Smartphone:



Superficie del Smartphone es

$$x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$$

$$\text{Superficie es } f(x) = (x+2)(y+4) = (x+2)\left(\frac{18}{x} + 4\right) = x \cdot \frac{18}{x} + 4x + 2 \cdot \frac{18}{x} + 8 = 18 + 4x + \frac{36}{x} + 8$$

$$f(x) = 26 + 4x + \frac{36}{x}$$

Averiguemos su valor mínimo usando la derivada

$$f(x) = 26 + 4x + \frac{36}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 - \frac{36}{x^2}$$

La igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

Solo es posible el valor positivo, es decir, $x = 3$

$$\text{Como } f'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{72x}{x^4} = \frac{72}{x^3}$$

Veamos si $x = 3$ es mínimo utilizando el signo de la derivada segunda de la función.

$$f''(3) = \frac{72}{3^3} > 0. \text{ La función superficie del móvil presenta un mínimo en } x = 3; y = \frac{18}{3} = 6.$$

Las dimensiones de la pantalla del móvil es 3 cm y 6 cm. Y el móvil mide 5 cm y 10 cm.

3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

$$A^{-1}XA = B \Rightarrow A \cdot A^{-1}XA \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz A .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & -3+1 \\ -2-2 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 & 5+6 \\ -4-2 & -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

La matriz es $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

4. Dados la recta $r: x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{2}}{-\frac{3}{2}}$ y el plano $\pi: 2x + y + z = 9$ se pide

- a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
 b) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

- a) Para que recta y plano sean paralelos la primera condición es que vector director de recta $\vec{v}_r = \left(1, 1, \frac{-3}{m}\right)$ y vector normal de plano $\vec{n} = (2, 1, 1)$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser 0.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \left(1, 1, \frac{-3}{m}\right) \cdot (2, 1, 1) = 0 \Rightarrow 2 + 1 - \frac{3}{m} = 0 \Rightarrow 3m - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{3} = 1}$$

En este caso la recta es $r: x = y + 1 = \frac{z - 11}{-3}$ y el plano $\pi: 2x + y + z = 9$ no son coincidentes ya que el punto $P(0, -1, 11)$ de la recta no está en el plano.

$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P(0, -1, 11) \in \pi? \\ \pi: 2x + y + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 - 1 + 11 = 9? \text{ No es cierto y el punto no está en el plano y}$
 recta y plano son paralelos.

b)

Para $m = 2$ la recta queda con ecuación $r: x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{2}}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow r: \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + t \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}t \end{array} \right\}$

Averiguemos el punto de intersección resolviendo el sistema formado por recta y plano.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi: 2x + y + z = 9 \\ x = t \\ r: y = -1 + t \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}t \end{array} \right\} \Rightarrow 2t - 1 + t + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}t = 9 \Rightarrow 4t - 2 + 2t + 11 - 3t = 18$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ 3t = 9 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow y = -1 + 3 = 2 \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right\}$$

El punto es $A(3, 2, 1)$