

Nota sobre la puntuación de las preguntas: Los puntos asignados a las distintas preguntas son orientativos. En muchos casos, las preguntas pueden contestarse de varias formas distintas y el corrector debe utilizar la puntuación asignada en las soluciones que aquí se presentan, como guía para la asignación de la puntuación definitiva.

Opción A

1. Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1,-2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$. (2,5 puntos)

Solución:

-- Como P, es un punto de tangencia, será un punto de la gráfica de $f(x)$, por lo que se cumple que:

$$f(1) = -2 \Rightarrow -2 = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + c \cdot 1 + d = 1 + c + d$$

1 punto

Es decir: $-2 = 1 + c + d \Leftrightarrow c + d = -3$ (1)

-- Por otra parte, el valor de la derivada en el punto de tangencia $x = 1$ es igual a la pendiente de la recta tangente $y = 5x - 7$ que es 5, y como $f'(x) = 6x^2 - 2x + c$ se tiene

$$f'(1) = 6 - 2 + c = 5 \Rightarrow c = 5 - 6 + 2 = 1.$$

1 punto

-- Sustituyendo el valor de c en (1), se obtiene: $1 + d = -3 \Rightarrow d = -4$.

0,5 puntos

2. Resolver las siguientes integrales

a) $\int_{\frac{1}{2}}^e \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx$ (1,25 puntos)

b) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ (1,25 puntos)

Solución:

a) Resolvemos primero la integral indefinida $I = \int \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx$

-- Hacemos el cambio de variable $\ln 2x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$ con lo que

$$I = \int \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \int \frac{t^2}{3} dt = \frac{1}{3} \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{9} (\ln 2x)^3 + C$$

0,75 puntos

-- y aplicando ahora la regla de Barrow resulta

$$\int_{\frac{1}{2}}^e \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \left[\frac{1}{9} (\ln 2x)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^e = \frac{1}{9} [(lne)^3 - (\ln 1)^3] = \frac{1}{9} [1 - 0] = \frac{1}{9}$$

0,5 puntos

b) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx = 3 \int \frac{x^4}{x^2} dx + 5 \int \frac{x^2}{x^2} dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = 3 \int x^2 dx + 5 \int dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx =$

$$3 \frac{x^3}{3} + 5x + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = x^3 + 5x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

1.25 puntos

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular el valor x para que se cumpla: $A + B + C^2 = 3 \cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2. (1 punto)
- b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A \cdot X + C^2 = 3 \cdot I_2$ (1,5 puntos)

Solución:

a)

$$-- C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

0,25 puntos

$$-- 3 \cdot I_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

0,25 puntos

$$-- A + B + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix}$$

0,25 puntos

$$-- \text{Luego: } \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

0,25 puntos

b)

$$-- AX + C^2 = 3I_2 \rightarrow AX = 3I_2 - C^2 \rightarrow X = A^{-1}(3I_2 - C^2)$$

0,5 puntos

-- Calculamos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -1 \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

0,5 puntos

$$-- 3I_2 - C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-- \text{Entonces } X = A^{-1}(3I_2 - C^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

0,5 puntos

4. Dado el plano $\pi: 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$, se pide:

- a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π . (1,25 puntos)
- b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r . (1,25 puntos)

Solución:

a) -- Si el plano π es paralelo a la recta r , entonces vector normal a π es perpendicular al vector dirección de r y el producto escalar de ambos vectores es 0

0,25 puntos

Hallamos

-- Vector dirección de r : $v_r = (2, 6, -4)$

0,25 puntos

-- Vector normal a π : $n_\pi = (5, a, 4)$

0,25 puntos

-- Calculamos su producto escalar, lo igualamos a 0 y despejamos a

$$v_r \cdot n_\pi = (2 \ 6 \ -4) \begin{pmatrix} 5 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} = 10 + 6a - 16 = 6a - 6 = 0 \rightarrow a = 1$$

0,5 puntos

b) Si $a = 0$, entonces $n_\pi = (5, 0, 4)$.

Llamemos α al ángulo entre r y π , entonces,

$$\text{-- } \text{sen}(\alpha) = \frac{\langle v_r, n_\pi \rangle}{\|v_r\| \|n_\pi\|} = \frac{10+0-16}{\sqrt{2^2+6^2+(-4)^2} \sqrt{5^2+0^2+4^2}} = \frac{-6}{\sqrt{56}\sqrt{41}} = \frac{-6}{\sqrt{2296}} = \frac{-6}{47,91} = -0,1252$$

1 punto

luego, $\alpha = \arcsen(-0,1252) \approx 7,1923^\circ$

0,25 puntos

Nota sobre la puntuación de las preguntas: Los puntos asignados a las distintas preguntas son orientativos. En muchos casos, las preguntas pueden contestarse de varias formas distintas y el corrector debe utilizar la puntuación asignada en las soluciones que aquí se presentan, como guía para la asignación de la puntuación definitiva.

Opción B

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento (1,5 puntos)

b) Calcular los máximos y mínimos relativos (1 punto)

Solución:

a) -- Calculamos la derivada primera de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{e^{x^2} 2x - x^2 e^{x^2} 2x}{(e^{x^2})^2} = \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}}$$

0,5 puntos

-- Calculamos los puntos donde se anula $f'(x)$

$$\frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow 2x - 2x^3 = 0 \rightarrow 2x(1 - x^2) = 0 \rightarrow x(1 - x)(1 + x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

0,5 puntos

-- Estudiamos el signo de $f'(x)$ y se tiene:

$f'(x) > 0$ en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1) \Rightarrow f(x)$ creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$

$f'(x) < 0$ en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, \infty) \Rightarrow f(x)$ decreciente en $(-1, 0)$ y en $(1, \infty)$

0,5 puntos

b) -- Del estudio del crecimiento y decrecimiento de la función se deduce inmediatamente que:

- existe un máximo en $x = -1$. El punto donde está ese máximo es $(-1, f(-1)) = (-1, \frac{1}{e})$

- existe un mínimo en $x = 0$. El punto donde está ese mínimo es $(0, f(0)) = (0, 0)$

1 punto

- existe un máximo en $x = 1$. El punto donde está ese máximo es $(1, f(1)) = (1, \frac{1}{e})$

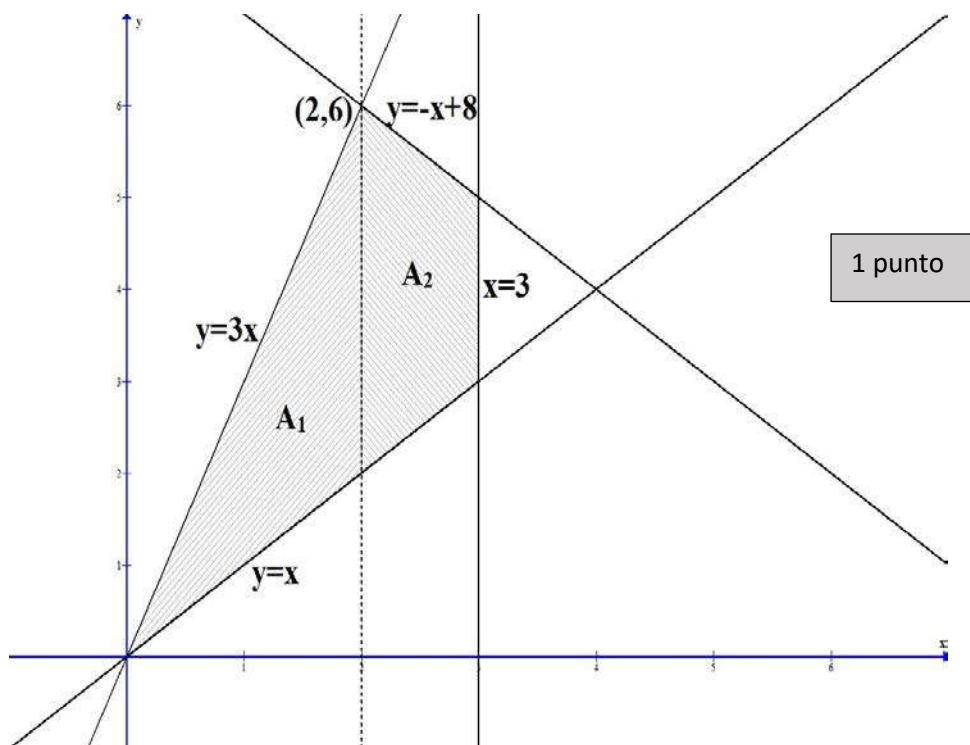
2. Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

$$y = 3x \quad ; \quad y = x \quad ; \quad y = -x + 8 \quad ; \quad x = 3 \quad (2,5 \text{ puntos})$$

Solución:

-- Calculamos el punto de corte de las rectas $y = 3x$ e $y = -x + 8$ resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de ambas líneas.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ y = -x + 8 \end{array} \right\} \rightarrow 3x = -x + 8 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{punto } (2,6)$$



Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^2 (3x - x) dx + \int_2^3 [(-x + 8) - x] dx = \int_0^2 2x dx + \int_2^3 (-2x + 8) dx = \\ &= \left[\frac{2x^2}{2} \right]_0^2 + \left[-\frac{2x^2}{2} + 8x \right]_2^3 = (4 - 0) + [(-9 + 24) - (-4 + 16)] = 7 \end{aligned}$$

1,5 puntos

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + kz = 1 \\ kx + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right\}$$

a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k .

(1,5 puntos)

b) Resolverlo para $k = 2$

(1 punto)

Solución:

a) -- Sea $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes y $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ k & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada del sistema.

$$\text{-- det}(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = k^2 + 3k - 10 = 0 \rightarrow k = 2 \text{ y } k = -5.$$

0,25 puntos

Entonces

$$\text{-- Si } k \neq 2 \text{ y } k \neq -5 \rightarrow \text{det}(M) \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(M) = \text{Rang}(M^*) = 3 \rightarrow \text{SCD}$$

0,25 puntos

$$\text{-- Si } k = 2 \rightarrow \text{det}(M) = 0 \text{ y como } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(M) = 2$$

Además

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \text{ tiene rango 2 pues } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

por lo tanto:

$$\text{Rang}(M) = \text{Rang}(M^*) = 2 \rightarrow \text{SCI}$$

0,5 puntos

$$\text{-- Si } k = -5 \rightarrow \text{det}(M) = 0 \text{ y como } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(M) = 2$$

Además

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \text{ tiene rango 3 pues el menor } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -28 \neq 0$$

por lo tanto:

$$\text{Rang}(M) = 2 \text{ y } \text{Rang}(M^*) = 3 \rightarrow \text{SI}$$

0,5 puntos

b) -- Para $k = 2$ el sistema es equivalente al siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right\} \text{ y si hacemos } z = t \text{ resulta}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = -2 + t \\ y = -3 + 3t \end{array} \right\} \rightarrow 2x + 2(-3 + 3t) = -2 + t \rightarrow x = -\frac{5t}{2} + 2$$

Luego la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = -\frac{5t}{2} + 2 \\ y = 3t - 3 \\ z = t \end{cases}$$

1 punto

4. Dados los planos: $\pi_1: x - y + 3 = 0$; $\pi_2: 2x + y - z = 0$, determinar:

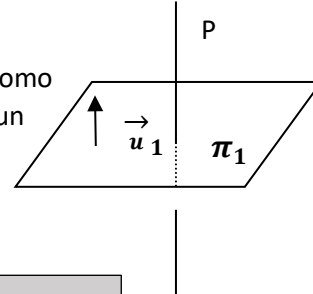
a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2, 2, 1)$. (1 punto)

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1, 1, -1)$. (1,5 puntos)

Solución:

a.- La recta perpendicular a π_1 y que contiene a P tendrá como determinación lineal el par (P, \vec{u}_1) , siendo $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$, un vector perpendicular a π_1 .

0,25 puntos



Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

0,75 puntos

b.- La recta que determinan π_1 y π_2 , se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos:

$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Si hacemos $y = \lambda$, tenemos: la ecuación en forma paramétrica de la recta pedida:

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -6 + 3\lambda \end{cases}$$

0,5 puntos

El plano pedido, tendrá como vector característico, el vector de dirección de la recta r , es decir el vector $\vec{v} = (1, 1, 3)$ y su ecuación general será:

$x + y + 3z + d = 0$, que como pasa por el punto $A(1, 1, -1)$, se verifica que: $1 + 1 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = 1$

Entonces la ecuación general del plano es: $x + y + 3z + 1 = 0$

1 punto